

ШИФР 11-08

Олимпиадная работа
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников

по математике

учащегося 11 класса

муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения
«Средняя общеобразовательная школа №16
с углубленным изучением отдельных предметов»

Кузнецова Дмитрия Николаевича
(ФИО полностью)

Педагог-наставник:

учитель математики

МБОУ «СОШ №16 с УИОП»
(наименование ОУ)

Путинцева Галина Ивановна
(ФИО полностью)

11.1 Задача: Можно ли показать 7 "да" и 7 "нет"?

11-08

Решение:

Рассмотрим ситуацию где все открытки были у игроков, тогда все игроки на вопрос есть или нет в ответе открывают ответом "да", 4д имеют ответом "да" т.е. соврут.
 $\Rightarrow 14$ ответов "да"

~~Аналогично~~

Рассмотрим ситуацию где все открытки были у игроков:
 \Rightarrow имеют ответом на вопрос "нет", соврут, а игроки могут ответить "нет" так как у них этой открытки не будет.
 $\Rightarrow 14$ ответов "нет"

Рассмотрим ситуацию где $\neq 1$ открытка у игрока, бы игроки
 \Rightarrow ответы будут такие: "нет" — 1, у игрока у которого есть открытка
 "да" — 6, игроки без открытки — 1 у игрока у которого нет открытки
 6, игроки с открытками

И тогда, получаем 2 ответа "нет", 12 ответов — "да".

Протранслировав эти ситуации можно понять, что кому бы мы не давали открытки:

игроки у которых есть открытка = x
 игроки у которых нет открытки = y
 игроков у которых нет открытки = z
 игроки у которых есть открытка = d

$\Rightarrow z + d = x + y$

$\Rightarrow x + d = y + z = 7$

люди у которых есть открытка

\Rightarrow "да" = $y + d$ "нет" = $x + z$, но y, x, z, d — или четное число, или нечетное, $\frac{7}{2}$

знаем что x — нечетное, y — четное

$\Rightarrow x + x = 2$, $2 + 2 = 4$, то есть мы в любой ситуации получим четное кол-во ответов "да" и "нет".

Ответ: не могу.

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ x \neq 0 \\ z \neq 0 \\ d \neq 0 \end{cases}$$

то есть $\{d \text{ или } z\} \neq 0$ мы можем
 $(x \text{ или } y) \neq 0$ будет ответ из
 \Rightarrow будет или "да" или "нет".
 — или ответом
 будет \Rightarrow

11.2 ~~a, b, c~~ a, b, c - попарно взаимно простые, невозможные, простые числа 11-08

$$\frac{a+b+c}{3} = 2 - \text{простое число}$$

Докажем:

$$(b-a) \equiv 6$$

$$(c-b) \equiv 6$$

Докажем:

Так как a, b, c - попарно взаимно простые невозможные простые числа
 \Rightarrow a, b, c - простые, так если бы они были составными и невозможными
 они бы $\equiv 2$, \Rightarrow они не были бы простыми \Rightarrow

\Rightarrow так как числа попарно взаимно простые найдем что $a+d=b$
 (n-простое) d - какое-то простое число которое прибавили к a чтобы
 получить b. Если бы d было составным, тогда $a+d=b$
 \Rightarrow b было бы составным, что противоречит условию. $(n) + (n) = (n)$
 $\Rightarrow b+d_1=c \Rightarrow d_1$ так же простое $\Rightarrow \frac{a+b+c}{3} = 2 \Rightarrow \frac{a+(a+d)+(a+d+d_1)}{3} = 2$

$$\Rightarrow \frac{3a+2d+d_1}{3} = 2 \Rightarrow \text{так как числа попарно взаимно простые найдем}$$

что $d_1=d$ так если $d_1 \neq d$, то 2 - не простое число.

$$\Rightarrow \text{найдем что } \frac{a+(a+d)+(a+d+d)}{3} = 2 \Rightarrow \frac{3a+3d}{3} = 2 \Rightarrow \frac{3(a+d)}{3} = 2 \Rightarrow a+d=2$$

\Rightarrow найдем что d - число которое прибавили к a чтобы получить b
 правильно \Rightarrow d - число которое прибавили к a чтобы получить b
 как b простое найдем c - простое

$$\left\{ \begin{matrix} (b-a) \equiv 2 \\ (c-b) \equiv 1 \end{matrix} \right\} \text{ так арифметическая прогрессия} \Rightarrow \text{нужно доказать что } d \equiv 6$$

А так как 6 делит 2, 3, то что $d \equiv 2$ а уже доказал выше, $\Rightarrow d \equiv 3$?

$d \equiv 3$? так d - простое, но оно как минимум должно быть или 6 или $6 \cdot n$, n - любое натуральное $n \neq 0$
 так если $d \neq 6$, $d \neq 6 \cdot n$ то тогда a, b, c - не арифметическая прогрессия, так же доказано
 условие что a, b, c - попарно взаимно простые. \Rightarrow арифметическая прогрессия образует только
 одно число когда $d=6$ или $d=6 \cdot n$, n - н.ч.

11.3.19 Демонстрация:



c - основание, $= 2$

11-08

\Rightarrow чтобы abc было треугольником

$$\left. \begin{array}{l} a+b > c \\ a+c > b \\ b+c > a \end{array} \right\} \begin{array}{l} a+b > 2 \\ a+2 > b \\ b+2 > a \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} \text{max } a = b+1 \\ \text{min } a = b-1 \end{array} \\ \text{или} \\ \begin{array}{l} b = a+1 \\ \text{или} \\ b = a-1 \end{array} \end{array} \right.$$

Так как если $b = a+1+n$ (n - любое натуральное число больше 0) то тогда $a+2 > b$ не может выполняться \Rightarrow противоречие условиям.

Аналогично с другими сторонами.

Нужно доказать:

изменив количество ≥ 808 или $a_1 = 25$

Доказательство

если $a_1 = 25$, то $(b = a+1 \text{ или } b = a-1)$ в любом случае как бы ни было больше треугольник уже не получится. Возьмем $b = a+1 \Rightarrow b_1 = 26$

$$\Rightarrow \text{сумма } P_{\text{max}} = 25 + 26 + 2 + a_2 + b_2 + 2 + a_3 + b_3 + 2 + \dots + a_{19} + b_{19} + 2$$

$$\text{Сумма } P_{\text{max}} = 25 + 26 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \dots + a_{19} + b_{19} + (2 \cdot 19)$$

$$\text{Сумма } P_{19} \text{ макс} = 51 + 38 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \dots + a_{19} + b_{19}$$

$$\text{Сумма } P_{19} \text{ макс} = 89 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \dots + a_{19} + b_{19}$$

Далее ограничиваем:

$$\text{Сумма } P_{19} < 808, \text{ тогда: } 89 + b_2 + a_2 + a_3 + b_3 + \dots + a_{19} + b_{19} < 808$$

так как $b = a+1$, заменим все в формуле переписав:

$$\text{Сумма } P_{\text{max}} = (a_2 + 1) + a_2 + (a_3 + 1) + a_3 + \dots + (a_{19} + 1) + a_{19} < 719$$

$$\Rightarrow 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + \dots + 2a_{19} + 18 < 719 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + \dots + 2a_{19} < 701 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(a_2 + a_3 + \dots + a_{19}) < 701 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 + a_3 + \dots + a_{19} < 350,5, \text{ но так как } a - \text{целое число} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 + a_3 + \dots + a_{19} \leq 350$$

$$\Rightarrow \text{так } b = a+1 \Rightarrow b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_{19} \leq 368 \Rightarrow$$

$$+ 89 \Rightarrow a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \dots + a_{19} + b_{19} \leq 718$$

$$\Rightarrow a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \dots + a_{19} + b_{19} \leq 807$$

11.32) Доказательство:

Если $a_1 = 25$ то $b_1 = a_1 + 1 \Rightarrow b_1 = 26 \Rightarrow b = a + 1, b$ и a связаны
как и раньше в решении были неравенства уже не выполняются

$$\neq \text{Сумма } P_{1999} = 25 + 26 + 2 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + 2 \dots + a_{19} + b_{19} + 2$$

$$\text{Сумма } P_{1999} = 51 + (19 \cdot 2) + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + a_4 + b_4 \dots + a_{19} + b_{19}$$

$$\text{Сумма } P_{1999} = 89 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \dots + a_{19} + b_{19}$$

Получим от обратного:

$$\text{Сумма } P_{1999} < 808$$

$$89 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \dots + a_{19} + b_{19} < 808$$

$$a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \dots + a_{19} + b_{19} < 719$$

Заменяю a на $b-1$

$$b_2 - 1 + b_2 + b_3 - 1 + b_3 \dots + b_{19} - 1 + b_{19} < 719 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b_2 - 1 + 2b_3 - 1 + 2b_4 - 1 \dots + 2b_{19} - 1 < 719 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b_2 + 2b_3 + 2b_4 \dots + 2b_{19} - 18 < 719$$

$$2b_2 + 2b_3 + 2b_4 \dots + 2b_{19} < 737$$

$$2(b_2 + b_3 + \dots + b_{19}) < 737 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_2 + b_3 + \dots + b_{19} < 368,5$$

$$\Rightarrow b_2 + b_3 + \dots + b_{19} \leq 368, \text{ так как } b_i \text{ целые}$$

$$\Rightarrow \text{так как } a = b - 1$$

$$\Rightarrow a_2 + a_3 + \dots + a_{19} \leq 350$$

$$\Rightarrow b_2 + b_3 + \dots + b_{19} \leq 368$$

$$+ a_2 + a_3 + \dots + a_{19} \leq 350$$

$$a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \dots + a_{19} + b_{19} \leq 718$$

+89

$$\Rightarrow a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \dots + a_{19} + b_{19} \leq 769$$

$$\Rightarrow a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \dots + a_{19} + b_{19} \leq 807$$

807 \neq так как $807 < 808$ но мы из неравенств получили 19-значные

и не выполняются. Заключим, что некоторые неравенства
не выполняются \Rightarrow Сумма $P_{1999} \geq 808$. и т.д.

11.4 Теорема:

Так как окружность

28-гранника пошла на $(1; 0) \Rightarrow$

\Rightarrow еще 3 вершины пошла на точку $(0; 1)$
 $(-1; 0) (0; -1) \Rightarrow$

$28-4=24$ 24 отрезки

на прямоугольной окружности, и так как π на окружности

и $\frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$ в каждой секторе \Rightarrow

если со значениями на точках $(1; 0) (0; 1) (-1; 0) (0; -1)$ все значения

от 0 до $\frac{\pi}{2}$ $(1; 0) = 0; (0; 1) = \frac{\pi}{2}; (-1; 0) = \pi; (0; -1) = \frac{3\pi}{2}$, то значения

на остальных точках могут быть $\frac{\pi}{12}$ и $\frac{5\pi}{12}$. Возьмем I сектор, на нем значения в вершинах от 0 (не включая 0) до $\frac{\pi}{2}$

В I секторе значения будут:
 $0; \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}$

В II секторе значения будут:
 $\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}; \pi$

В III секторе значения будут:

$(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{12}; -\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{5\pi}{12}; -\pi)$ или $(\pi + \frac{\pi}{12}; \pi + \frac{\pi}{6}; \pi + \frac{\pi}{4}; \pi + \frac{5\pi}{12}; 2\pi)$

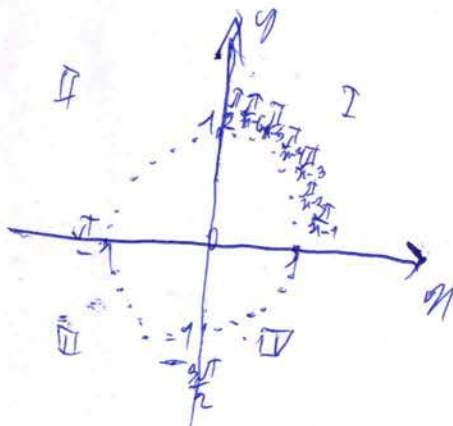
\Rightarrow так как \cos больше чем \sin \Rightarrow победит первый игрок

или косинусов закрепимся на $\frac{\pi}{6}$ \Rightarrow победит второй игрок

так как при $\frac{\pi}{6}$ \cos больше чем \sin \Rightarrow победит первый игрок

значения $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$ остаются еще две точки и они могут быть из $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$

от 0; до $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ так $\cos \frac{\pi}{6} > \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow$ и значение берется по модулю \Rightarrow
 $S_1 < S_2$ так значения берется по модулю и в II секторе значения $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$ больше чем косинус по модулю, в I секторе $\frac{\pi}{6}$ больше \Rightarrow
 $S_1 > S_2 \Rightarrow$ победит I игрок.
 Ответ: выигрывает первый игрок.



11-08

11.5 $a^3 - b^3 = c^4$
 $c \mid 5^{2025}$

$$a^3 - b^3 = (5^{2025} + 1)^4$$

$$a^3 - b^3 = 5^{8100} + 1$$

$$a^3 - b^3 = 5^{8100} + 1$$

$$a^3 - b^3 - 1 = 5^{8100}$$

$$a^3 - (b^3 + 1) = 5^{8100}$$

$$a^3 - (b^3 + 1) = 5^{8097} \cdot 5^3$$

$$\Rightarrow c^4 \mid 5^{8100} + 1$$










$$a^3 \mid 5^{8100} + 1 + b^3$$

$$b^3 \mid -5^{8100} - 1 - a^3$$

\Rightarrow уравнения не имеют решений в натуральных числах, т.е. н.н.ч.

~~Ответ: уравнения не имеют решений в натуральных числах.~~

Ответ: Нет да, верно.

№	Тема	ФИО, подпись
1	4	Мамеева О.Ю.  Розинкова И.Е. 
2	7	Бунукта С.В.  Кравец Т.П. 
3	4	Алехович Н.Н. 
4	0	Александров С.С.  Ковалева И.С. 
5	0	Александров С.С.  Ковалева И.С. 
Итого	21	